Fonctions algébriques: Définitions, zéros et domaines

	Fonction polynomiale	Fonction rationnelle	Fonction algébrique
Définition	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ où $a_i \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ <u>cas particuliers</u>: n=0: $f(x) = a_0$ fonction constante n=1: $f(x) = a_1 x + a_0$ fonction affine n=2: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ fonction quadratique (que l'on connaît sous la forme ax^2+bx+c)	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P(x) et Q(x) sont des polynomes et Q(x) n'est pas le polynôme nul. Toute fonction polynomiale est rationnelle. Note: $\frac{N}{D} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow N \in \mathbb{R}$ et $D \neq 0$	Une fonction algébrique est une fonction qui peut s'exprimer comme une combinaison finie d'opérations d'addition; de soustraction; de multiplication; de division; d'élévation à une puissance constante (dont extraction de racine). Toute fonction rationnelle est algébrique Exemples de fonctions algébriques : 1. $f(x) = \sqrt{x}$ 2. $f(x) = \sqrt{g(x)}$ où g(x) est polynomiale ou rationnelle. 3. fonction racine n-ième $f(x) = \sqrt[n]{x}$; $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$; $n \in \mathbb{N}$
Zéro(s) Définition: a est un zéro de f(x) ssi $f(a) = 0$ On cherche donc les valeurs de x tel que: $f(x) = 0$ Graphiquement, un zéro est une valeur de x pour laquelle la courbe de f(x) coupe ou touche l'axe horizontal.	Si $f(x) = a_0$ et $a_0 \neq 0$ alors f n'a pas de zéro. Si $f(x) = a_1 x + a_0$ avec $a_1 \neq 0$ et $a_0 \neq 0$ alors f(x) a un zéro unique de la forme $x = -\frac{a_0}{a_1}$ si $f(x) = ax^2+bx+c$; alors: f(x) a soit; deux zéros de la forme: $x_1 ; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ si $b^2 - 4ac \geq 0$; ou bien aucun si $b^2 - 4ac < 0$	$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ et $Q(x) \neq 0$ Note: $\frac{N}{D} = 0 \Leftrightarrow N = 0$ et $D \neq 0$	$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\sqrt{g(x)} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ $\sqrt[n]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	Fonction polynomiale	**Fonction rationnelle**	**Fonction algébrique**
Domaine Définition: C'est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x) \in \mathbb{R}$. Notation: dom(f)	Le domaine d'une fonction polynomiale est $\mathbb{R}$. $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$	Le domaine d'une fonction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $Q(x) \neq 0$. $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{ x \in \mathbb{R} \mid Q(x)=0 \}$ ou bien $\text{dom}(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0 \}$	Le domaine d'une fonction algébrique dépend de sa composition. Si elle est composée de plusieurs sous-fonctions; on commence à déterminer son domaine à partir de la sous-fonction la plus importante vers la plus petite. Les sous-fonctions sont déterminées à partir des différentes opérations constituant la fonction algébrique. Exemples: 1. $f(x) = \sqrt{x}$ est la fonction racine carrée. $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ si $x \geq 0$. Donc, $\text{dom}(f) = [0;+\infty[$ 2. Soit $f(x) = \sqrt{g(x)}$ $\sqrt{g(x)} \in \mathbb{R}$ ssi $g(x) \geq 0$ $\text{dom}(g) = \{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0 \}$ 3. fonction racine n-ième $f(x) = \sqrt[n]{x}$; $n \in \mathbb{N}$ si n est pair: $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ ssi $x \geq 0$ $\text{dom}(f) = [0;+\infty[$ si n est impair : $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ ssi $x \in \mathbb{R}$ $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$